ナッシュ均衡とパレート効率性

花京院と青葉の文体練習 2

浜田　宏

ver 1.0 (2016 年 5 月 23 日)

この種の問題は古典数学ではまったく扱われていない．いささか大げさないい方になるが，これは，条件付最大化問題でも，変分法の問題でも，また関数解析などの問題でもないのである (Neumann and Morgenstern 1953=2009:136).

登場人物[1]

神杉 青葉（かみすぎ　あおば）: S 大学文学部　数理行動科学研科 2 年生．数学がちょっと苦手な大学生．父親の影響でファーストガンダムが好き

花京院 佑（かきょういん　たすく）: S 大学文学部　数理行動科学科 2 年生．数学が好きな大学生．スタンド能力はない.

1　疑問

「ねえ，花京院君.《ナッシュ均衡》って分かる？」神杉青葉は，研究室でパソコンの前に座った花京院を見つけると，挨拶もそこそこに質問をきりだした．

「そりゃあ，知ってるよ．ナッシュ均衡はゲーム理論の最も重要な概念の一つって⋯⋯，あれ？　デジャブかな．これと同じ質問を数日前にも受けた気がするけど．⋯⋯ いや，いや．気のせいじゃないぞ．それ前にも説明したよ」彼は，青葉からの質問に反射的に反応しかけて思いとどまった．

「いや，聞いたかも知れないけど，忘れちゃったの．もう一回お願い．花京院君，暇でしょ？」

[1] 花京院と青葉って誰なんだと思った方は,『数理社会学入門—ベルヌーイ変奏曲』をご覧ください (http://www.sal.tohoku.ac.jp/~hamada/にて公開中)

「暇じゃないんだけどな．そんな有名な概念，教科書に説明が書いてあるでしょ．ちゃんと読んだの？」花京院はなにやらパソコンで作業している．プログラムを書いているようだ．

「もちろん，読んだわよ」青葉は，銀色のカヴァーのかかった本を花京院に差し出した．

「ロバート・ギボンズ『経済学のためのゲーム理論入門』か．なあんだ．ちょっと旧いけど定番の本を見つけてるじゃないか．それを読んでおけば問題ないよ」

「いやいやいや，読んでも分からないから，花京院君に聞いてるんだよ」青葉は, 本を開くとナッシュ均衡の定義が書かれた部分を指さした

2　ナッシュ均衡とはなにか

「それじゃあ本の読み方を教えてあげるよ」

「ちょっとおー，馬鹿にしないでよ，本の読み方くらい知ってるわよ．日本語なんだし」

「いや，この手の数理モデルのテキストの読み方には，ちょっとしたコツがあるんだ．それさえ分かればあとは１人で読める」花京院は，ガラガラとホワイトボードを移動して机の横に置いた．

2.1　デートの行き先は？

「よーしギボンズ本の最初に書いてある，有名な例からいくか．ねえ，神杉さん，デートに行くならどこに行きたい？」

「デ，デデ，デート？　花京院君と？　ちょっまっ　ふお」

「どれだけ嫌なんだよ．たとえだよ喩え.」

「（い，嫌とはいってないじゃん……）えーっと，じゃあ，あえて定番の,《八木山動物園》か《杜の水族館》．いや，ほら私くらいのデートマスターになるとさ，もっといいところ知ってるんだよ．穴場的な？　でもまあ，例だから例．誰でも知ってる場所じゃないと」

「いいよ，その二つで．次に，その候補から行き先を二人が相談せずに決める状況を考えてみよう」

		青葉	
		動物園	水族館
花京院	動物園	2, 1	0, 0
	水族館	0, 0	1, 2

表 1: デートの行き先

「この表は，行き先の組み合わせと，その組み合わせから得る効用を表したものだよ，2 つの数字のうち，左が僕の効用で，右の数値が君の効用だよ」花京院が表の読み方を説明した．

「え？　ちょっと待って．デートでしょ？　どうして相談もせずに行き先を決めちゃうの?」

「確かに不自然だけど，非協力ゲームの説明だから，相談できないんだ．相談できるモデルもあるけど，その場合は協力ゲームになってしまって，ナッシュ均衡が説明できない」

「うーん，なんだか状況が理解できない」

「よし，こうしよう．行き先は事前に相談して『水族館』に決まってたんだけど——」

「うんうん」

「待ち合わせ場所に向かう途中で，二人とも今日は水族館が定休日だということに気づいたんだ」

「なるほど．じゃあ，すぐに相手の携帯に電話しなきゃ」

「ところが，君は携帯を持っていない．なぜなら先月使いすぎて，お父さんから携帯禁止令が出ているから」

「ぐっ……．それを言う？確かにいま，携帯を持ってないのは事実……[2]．でもお互い定休日だって分かってるんなら，行き先を動物園に変えればすむんじゃ……，はっ」

青葉の様子を見て，花京院はにやりと笑った．

「確かに二人とも，今日が定休日であることは知っている．でも，相手もそれを知っているかどうかは知らない」

「ってことは，相手がどちらに向かうか，お互いに分からないってことか……」

「そういうこと．さっそく 4 つの組み合わせが，それぞれナッシュ均衡になっているかどうかを調べてみよう．そのために直感的にナッシュ均衡の定義を与えておく」

[2]「相対的剥奪のモデル—花京院と青葉の文体練習 1」参照

2.2　ナッシュ均衡

定義 1 (ナッシュ均衡（直感的定義）). 以下の 2 条件を満たす戦略の組み合わせを《ナッシュ均衡》という.

1. 自分だけ戦略を変えても利得が増えない,
2. 上記 1. が全員に成り立つ

「これだけ？」

「うん，まあ今のところこれで十分．この定義を使って，表の組み合わせの中でどこがナッシュ均衡になるかを確かめてみるといいよ．モデルを理解するにはモデルの世界に入って考えるんだよ」

青葉は，表に矢印を書き込みながら，利得がどう変化するのかを比べてみた．

$$

えーっと，まず (どうぶつ園, どうぶつ園)っていう組み合わせから確かめてみるよ．

さっき描いてくれた図を使って……，

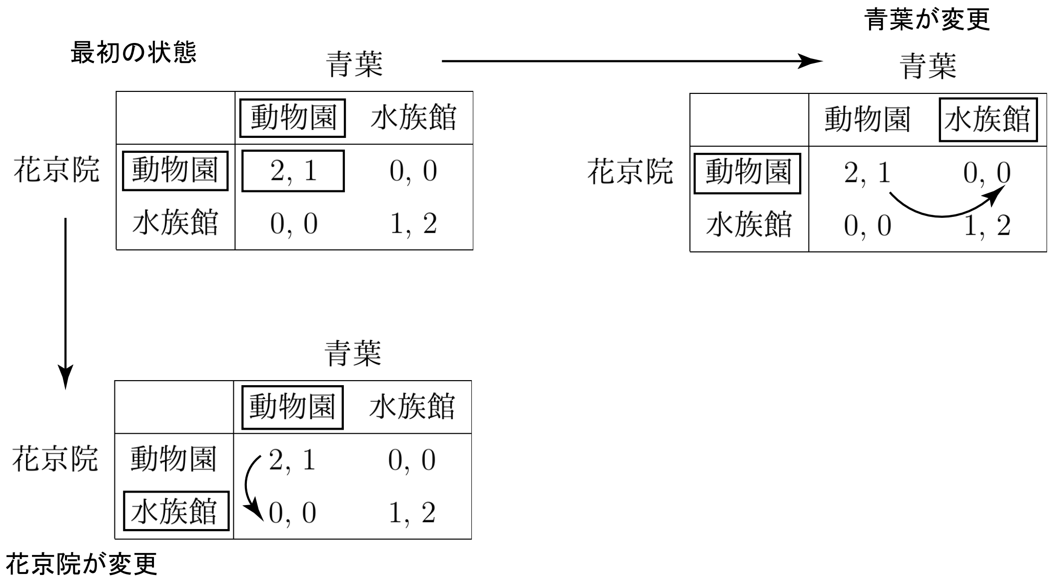

図 1: 選択を変えた場合の利得の変化

最初の状態では，花京院君と私がどうぶつ園を選択している．

ここから……，私だけが選択を変える．すると……，私の利得は 1 から 0 に減るね．

つぎに花京院君だけが選択を変えたと仮定する

すると……，花京院君の利得は2から0に減る．

まとめると,『自分だけ戦略を変えても利得が増えない』ってことが『全員（私と花京院君)』について成り立ってるよ．ってことは

(どうぶつ園, どうぶつ園)

っていう組み合わせはナッシュ均衡だ！

$$

「うん，その通りだよ．1人ずつ選択を変えた場合の利得をちゃんと比較したところがよかったね」

「なんだあ，簡単じゃない」

「他には？」

「へ？」青葉は思わず目を見開いた．

「だってまだ1つの組み合わせしか調べてないでしょ」

「でもナッシュ均衡が見つかったから，もういいじゃん」

「ナッシュ均衡は1つとは，限らないよ」

「え？　そうなの，だって定義に……，うわわ，確かに1つだけとは書いてない．ってことは他にも条件を満たす組み合わせがあれば，それもナッシュ均衡なんだね」

「そういうこと」

$$

「よーし，じゃあ次の組みあわせを調べよう．次は (水族館, どうぶつ園) が最初の状態だと仮定するよ」

青葉は利得表を書いた計算用紙に，新しい矢印を書き込んだ．

$$

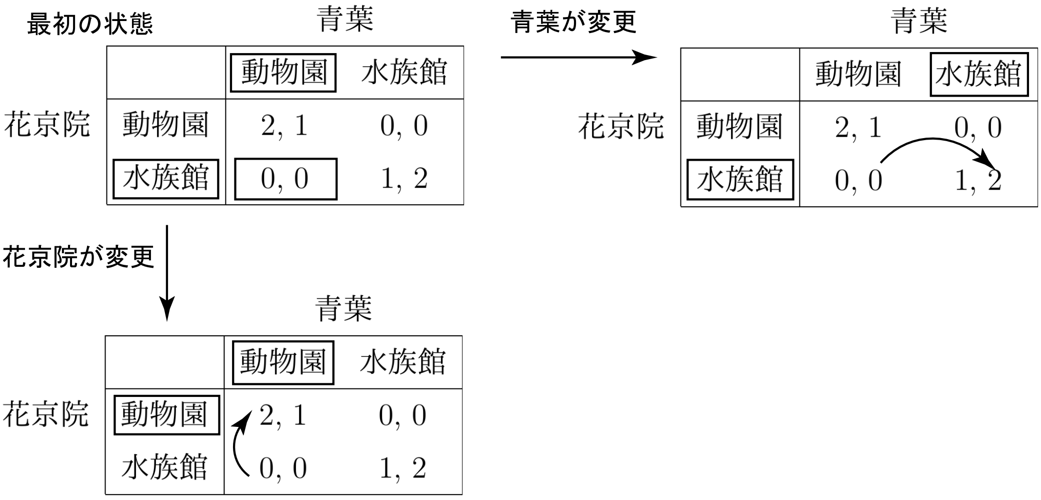

図 2: 選択を変えた場合の利得の変化

私だけ選択を変えると私の利得が上がるし，花京院君が選択を変えると花京院君の利得も上がるね．

だからこの状態はナッシュ均衡じゃないよ．

まあ，これはなんとなく違うかなーって思ってたから，予想どおりだね．

よし，続けて

(どうぶつ園, 水族園) と (水族園, 水族園)

がナッシュ均衡かどうかを確認してみるよ．

えーっと，私だけ選択を変えるとこうなって……，次に花京院君だけ選択を変えると，こうなるから……，ふむふむ．

(水族園, 水族園)

はナッシュ均衡で,

(どうぶつ園, 水族園)

はナッシュ均衡じゃないね．

まとめると，こんな感じだよ．

ナッシュ均衡である状態：　(どうぶつ園, どうぶつ園), (水族園, 水族園)

ナッシュ均衡でない状態：　(水族園, どうぶつ園), (どうぶつ園, 水族園)

$$

「これであってるかな？」青葉が聞いた．

「うん．あってるよ．ナッシュ均衡かどうかを判定する手順は，

1. 調べる状態（戦略の組み合わせ）を 1 つに固定する
2. 対象の状態から 1 人だけ戦略を変えて，利得が増えないかどうかを調べる
3. 上記 1.2. を繰り返して全員もれなくチェックする

だよ．もし 1 人でも，利得が増える人がいたら，ナッシュ均衡じゃないからね」

2.3 ナッシュ均衡——より一般的な定義

「具体例でナッシュ均衡のイメージがつかめたと思うから，もう少し一般的で厳密な定義を確認しておこう．定義に必要なプレイヤー集合，戦略集合と利得関数を先に定義するよ」

$$

定義 2 (プレイヤー集合と戦略集合)**.**

$$N = \{1, 2, \cdots, n\}$$

を n 人からなるプレイヤーの集合とする．プレイヤー i の戦略集合を S_i で表す．集合 S_i の中身は，i が選択できる戦略である．例えば，

$$\{a, b, c\} = S_i$$

はプレイヤー i のとりうる戦略が a, b, c の 3 つあることを意味する．

戦略は，その組み合わせが大切だ．

例えば，$N = \{1, 2\}, S_1 = \{a, b\}, S_2 = \{c, d\}$ であるとき，戦略集合の直積

$$S_1 \times S_2 = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$$

は，可能な戦略の組み合わせ全てを含んでいる．

$$

「えーっと，直積ってなんだっけ？」青葉は目を閉じて記憶を探った．

「要素のペアの集合だよ．戦略集合の直積は，実現しうる社会状態の全てを要素とする集合．順序対って覚えてる？」

「順序対……，おー，まえに花京院君が教えてくれたやつだね[3]．この場合の順序対は，戦略の組み合わせってことかあ」

「順序対だから，戦略の順番にも意味があることに注意してね．例えば (a, c) ならプレイヤー 1 が戦略 a でプレイヤー 2 が戦略 c だよ」

「ふむふむ」青葉はうなずいた．

「利得関数は，全ての社会状態に対して，それが実現した場合にプレイヤーが得る利得を示す関数なんだ」

$$

定義 3 (利得関数)**.** 戦略の組み合わせに対して，その組み合わせからプレイヤー i が受け取る利得を利得関数 u_i によって定義する．

$$u_i : S_1 \times S_2 \to \boldsymbol{R}$$

利得関数 u_i は，全ての戦略の組み合わせに対して，プレイヤー i がそこから得る利得を定めている．

利得関数の定義域は戦略の直積集合（全ての戦略の組み合わせ）で，地域が実数集合 $\boldsymbol{R}$ である．

$$

「うーん，ちょっとイメージがわかないな」

「そういうときは？」花京院が聞いた．

「えーと……，そうだ．具体例を作る，だったね」青葉はさっそく例の作成にとりかかった．

[3]『数理社会学入門——ベルヌーイ変奏曲』参照

\$\$

よーし，2 人ゲームで例を考えてみようかな……

$$N = \{1, 2\}, S_1 \times S_2 = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$$

って仮定するよ．利得関数の定義域は戦略の組み合わせだから……

$$u_1((a, c)) = 3, \quad u_2((a, c)) = 5$$

こんな感じかな？　この利得関数は，戦略の組み合わせ (a, c) からプレイヤー 1 が利得 3 を，プレイヤー 2 が利得 5 をえることを意味してるよ．

どうかな？　ちゃんと具体例になってるかな？

\$\$

「OK．さっき考えた，デートの行き先を決めるゲームの利得関数も明示的に書くことができる．こんな感じだよ」花京院が続けた．

\$\$

$N = \{$ 花京院, 青葉 $\}$

$$\begin{aligned} S_{\text{花京院}} \times S_{\text{青葉}} = \{&(\text{どうぶつ園}, \text{どうぶつ園}), (\text{どうぶつ園}, \text{水族館}), \\ &(\text{水族園}, \text{どうぶつ園}), (\text{水族館}, \text{水族館})\} \end{aligned}$$

のとき，利得関数は

$$u_{\text{花京院}}((\text{ど}, \text{ど})) = 2, u_{\text{花京院}}((\text{ど}, \text{水})) = 0, u_{\text{花京院}}((\text{水}, \text{ど})) = 0, u_{\text{花京院}}((\text{水}, \text{水})) = 1$$
$$u_{\text{青葉}}((\text{ど}, \text{ど})) = 1, u_{\text{青葉}}((\text{ど}, \text{水})) =, 0 u_{\text{青葉}}((\text{水}, \text{ど})) =, 0 u_{\text{青葉}}((\text{水}, \text{水})) = 2$$

である (「ど」は「どうぶつ園」,「水」は「水族館」を表す)．

\$\$

「なんか，ややこしいねー．表で書いた方が分かりやすいじゃん」青葉が不満そうに言った．

「確かに 2 人ゲームで戦略の数が少ない場合は，表で書いた方が簡単だね．利得関数は，プレイヤー人数が 2 人より多い場合や，戦略の数がたくさんあるときに便利だよ．

さて，それじゃあナッシュ均衡の一般的な定義だ」

定義 4 (ナッシュ均衡). プレイヤーの集合を $N = \{1, 2, \cdots, n\}$，プレイヤー i の戦略集合を S_i で表す．戦略の直積集合を $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$, その要素を $\boldsymbol{s} \in S$ で表す．戦略の組み合わせ $\boldsymbol{s}$ から i の戦略だけを除いた組み合わせを，$\boldsymbol{s}_{-i}$ で表す．つまり

$$\boldsymbol{s}_{-i} = (s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

である．$\boldsymbol{s}$ から s_i を取り除いた $\boldsymbol{s}_{-i}$ と，s_i を組み合わせれば,

$$\boldsymbol{s} = (s_i, \boldsymbol{s}_{-i})$$

となる．戦略の組み合わせ $\boldsymbol{s} \in S$ がナッシュ均衡であるとは

$$\forall i \in N \quad (\forall t_i \in S_i \quad u_i(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}) \geq u_i(t_i, \boldsymbol{s}_{-i}))$$

が成立することをいう．

「この定義，ギボンズ本に書いてあったのと，だいたい同じなんだけど，ちょっと難しいなー．最初に花京院君が書いてくれた定義の方が，分かりやすかったよ」

「これから，こういう一般的表現がたくさんでてくるから，読み方を覚えておくといいよ．記号 $\forall$ は $\cdots\cdots$」

「あ，それ知ってる．ターンエーでしょ」

「おお，よく知ってるじゃん，意味は分かる？」

「意味は知らない」青葉は胸をはって言った．

「なぜ，読み方だけ知っている $\cdots\cdots$」

「$\forall$（ターンエー）ガンダムっていう，シリーズがあるのよ」

花京院はうなだれた．

「またガンダムか $\cdots\cdots$，まさかと思うけど $\exists$ ガンダムなんてないよね？」

「そんなの聞いたことないよ．ν(ニュー) ガンダムならあるけど．アムロが設計したニュータイプ専用機だよ．自慢じゃないけど，私のギリシア文字の知識は基本的にガンダムベースだから」

「たしかに自慢にならん $\cdots\cdots$」

2.4　$\forall t_i \in S_i$ の意味

「多分難しいのは，$\forall t_i \in S_i$ の部分じゃないかと思う．僕も最初にギボンズ本を読んだ時に理解できなかった．まず簡単な $\forall i \in N$ から説明しよう」

「うん」

「$\forall i \in N$ は集合 N に入っている任意の i という意味だ．言い換えれば，1 から n までの全員について，という意味．例えば

$$\forall i \in N \quad u_i(x) = 10$$

だったら，i が 1 でも 3 でも 5 でも n でもぜーんぶ $u_i(x) = 10$ってこと．つまり上の式が言ってるのは，

$$u_1(x) = u_2(x) = \cdots = u_n(x) = 10$$

ということ」

「ふーん，それじゃあ $\forall t_i \in S_i$ は？　」

「これはね，S_i に含まれる任意の戦略 t_i について，っていう意味だよ．t_i が 1 つの記号として，S_i の要素を代表しているっていうイメージだ．

$$\forall t_i \in S_i \quad \text{は，戦略集合 } S_i \text{の要素の中のどれでもよい}$$

っていう意味だよ．だから

$$\forall t_i \in S_i \quad u_i(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}) \geq u_i(t_i, \boldsymbol{s}_{-i})$$

は S_i の任意の要素 t_i に対して，$u_i(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}) \geq u_i(t_i, \boldsymbol{s}_{-i})$ が成り立つってことだよ．この不等式の意味は，i が使っている戦略 s_i を，戦略集合 S_i の要素であるどんな戦略に変えたとしても，i の利得は増えないってことだよ」

「うーん，やっぱり $\forall t_i \in S_i$っていう記号が，ちょっと難しいなあ」

「少し具体的な例を作ってみよう」花京院がホワイトボードに式を書き足した．

$$

具体例として，i の持っている戦略集合を $S_i = \{a, b, c\}$ と仮定する．このとき $\forall t_i \in S_i$ は a, b, c のどれでもよい，ということを意味する．例えば

$$\forall t_i \in S_i \quad f(t_i) > 10$$

という命題は，

$$f(a) > 10 \quad \text{かつ} \quad f(b) > 10 \quad \text{かつ} \quad f(c) > 10$$

と同じ意味だよ．

$$

2.5　パレート効率性

「ナッシュ均衡でない状態には，(水族園, どうぶつ園)，(どうぶつ園, 水族園) の 2 つがあった．この二つの状態は，ナッシュ均衡ではないだけでなく，パレート効率的でもない」

「あ，その《パレート効率》っていう概念もよく分からないんだけど」

「うーん，それも前に一度説明したと思うんだけどなあ」

「そうだっけ．一度聞いても忘れちゃうんだよ」

「まあ確かに，パレート効率性の定義は，少し複雑だから理解するのにコツが必要だね．また具体例で説明しよう」

$$

(水族館, どうぶつ園) という状態から，(どうぶつ園, どうぶつ園) という状態に変化したと仮定する．すると 2 人とも利得が増加する．

$$\text{戦略} : (\text{水族}, \text{どうぶつ}) \to (\text{どうぶつ}, \text{どうぶつ})$$

$$\text{利得} : (0, 0) \to (2, 1)$$

こんな具合に，誰の利得も下げずに，1 人以上の利得を高めることができることを，《パレート改善》というんだ．

このほかにも，(水族館, どうぶつ園) という状態から，(水族館, 水族館) という状態に変化してもパレート改善されるよ．

$$\text{戦略} : (\text{水族}, \text{どうぶつ}) \to (\text{水族}, \text{水族})$$

$$\text{利得} : (0, 0) \to (1, 2)$$

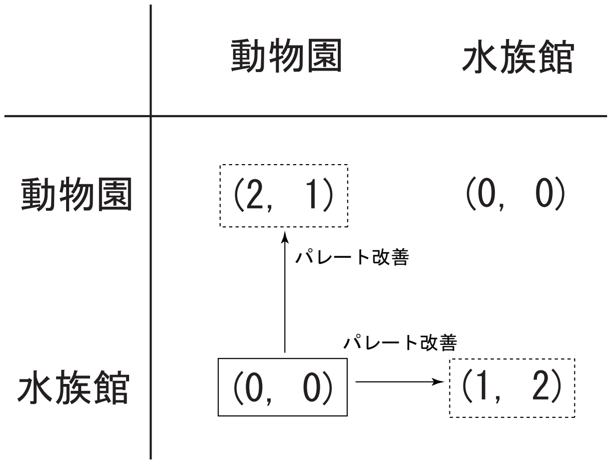

図 3: パレート改善できる (水族館, 動物園) はパレート効率的でない

そして，どうやってもパレート改善できない状態をパレート効率的という．逆に，パレート改善できるのであれば，もとの状態はパレート効率的でない，という．

(水族館, どうぶつ園) という状態は, (どうぶつ園, どうぶつ園) あるいは (水族館, 水族館) という社会状態によってパレート改善できるから，パレート効率的でない状態だね

$$

「うーん，何となく分かったかも．でも《誰の利得も下げずに，1 人以上の利得を高める》ってとこがちょっと難しいな．もっと単純に《全員の利得を高める》じゃだめなの？」

「そういう場合もパレート改善と考えていいよ．ただしパレート改善という概念自体は，もっと広い範囲に対応している.《全員の利得を高める》ことが出来る場合には，必ず《誰の利得も下げずに，1 人以上の利得を高める》ことができる．だから《全員の利得を高める》ことがパレート改善だと言ってしまうと都合が悪い．例えば……

$$(2,1) \to (2,2)$$

のような利得ベクトルの変化を考えてみよう．プレイヤー 1 については利得は変化してないけど，プレイヤー 2 にとっては，利得が増加している．したがって，左の状態は右の状態によってパレート改善されている．でも左から右への変化は《全員の利得を高める》わけではない」

「あ，そうか．利得が変化しない人がいてもいいんだね」

「そういうこと．直感的に言えば，パレート改善は,《誰からも文句が出ず，得をする人が 1 人はいる》状態への変化とも言える．だからパレート改善は，基本的には誰も反対しないんだ．フォーマルな定義を確認しておこう」

定義 5 (パレート効率性). 戦略の組 $\boldsymbol{s} \in S$ がパレート効率的であるとは

$$\forall i \in N \quad u_i(\boldsymbol{t}) > u_i(\boldsymbol{s})$$

となる戦略の組 $\boldsymbol{t} \in S$ が存在しないことである.

「なるほどー．花京院君のおかげで，ようやくナッシュ均衡とパレート効率性が分かったよ」

「テキストによってはパレート効率ではなく，パレート最適と書いているものがあるけど意味は同じだよ．ただ，僕はパレート効率のほうが，この概念の名称として適切だと思う」

「え？　どうして」

「最適っていう言葉は，最も適した状態，つまりベストな状態っていう意味で使うことが多いでしょ？」

「まあ，そうだよね」

「でもパレート最適（効率）な状態は必ずしもベストな状態じゃないんだ．例えばここにある 100 円を 2 人で分ける場面を考えてみよう」そう言って花京院は，財布から 100 円玉をとりだした．

「この 100 円玉を君と僕とで分けるパタンにはさまざまなものがある」

「そうだね」

「仮に僕がこの 100 円の分配方法として《99 円を僕がもらい，1 円を君にあげる》っていう分け方を提案したとしよう．この分け方はパレート効率的だと思う？」

「え？　そんな不公平な分け方，パレート効率的なわけないじゃん．だって……，あれ？　私の取り分を増やすと，花京院くんの取り分が減っちゃうね．あれれ？　ってことは,（99，1）はパレート効率的な状態なの？」

「定義上はそうなる」花京院は冷静に言った．

「パレート効率的って，全然ベストな状態じゃないね」

「《ベストな状態》の定義にもよるけど，少なくともパレート効率性は，公平さには何も配慮しない．だからパレート効率性が達成されたからと言って，それでいい，という訳じゃない．だから僕は，最適って呼ぶより，効率的って呼ぶ方がすきだ」

「ふうん」

「まあ，とにかく《ナッシュ均衡》と《パレート効率》の意味は分かったかな」

「うん．だいたい分かったよ．教えるほうの花京院君の知識には変化はないかもしれないけど，少なくとも私は前より賢くなったかな．これって，二人の状態がパレート改善されたってことかな？」

「そうかもね．まあ，僕にとっても勉強になったし，楽しかったよ」

二人はいつものようにコーヒーを入れると一息ついた．

References

Gibbons, R., 1992, *Game Theory for Applied Economists*, Princeton University Press = 1995, 福岡正夫・須田伸一（訳）『経済学のためのゲーム理論入門』創文社．

岡田章, [1996] 2011,『ゲーム理論 新版』有斐閣.

Osborne, Martin J., and Ariel, Rubinstein, 1994, *A Course in Game Theory*, MIT Press.