準拠集団と相対的剥奪の統一理論
Yitzhaki Index と δ 近傍モデルの統合および経験的検証

要旨

本稿の目的は，社会学における古典的理論の一つである「準拠集団理論」の統一的な数理モデルを提案し，大規模データによって理論モデルの妥当性を検証することである．はじめに先行研究のレビューから，準拠集団との比較から経済的満足度が決定するプロセスを表現したモデルには Yitzhaki による相対的剥奪指数（realtive deprivation index）と，浜田による δ 近傍モデルが存在することを確認する．次に δ 近傍モデルの特殊形として Yitzhaki Index が導出できることを証明し，2 つの理論モデルを統一する．次に統一的な理論モデルから仮説としてインプリケーションを導出し，仮説の経験的妥当性を大規模データによって検証する．比較した結果，準拠集団を有限の範囲から選択する δ 近傍モデルは，社会全体を準拠集団として選択する Yitzhaki モデルよりも，尤度の観点からデータをより説明できることが判明した．また理論モデルから導出した種々の仮説が，データと整合的であることも示す．

キーワード: 準拠集団，相対的剥奪，δ 近傍モデル

A Unified Theory of Reference Group and Relative Deprication: Integration of Yitzhaki Index and Generalized δ Interval Model and Its Empirical Test

Abstract

Key words: reference group, relative deprivation, δ interval model, SSP 2015

1　背景—準拠集団と相対的剥奪の理論と実証

図 1 は，2015 年に実施された全国調査「階層と社会意識全国調査（第 1 回 SSP 調査）」である [1] から作成した一年間の個人収入 [2] のヒストグラムである．サンプルは性別と年齢（ar30: 25-34 歳，ar40: 35-44 歳，ar50: 45-54 歳，ar60: 55-64 歳）により部分集団に分割している．図中の実線は，最尤推定された確率密度関数（対数正規分布）である．

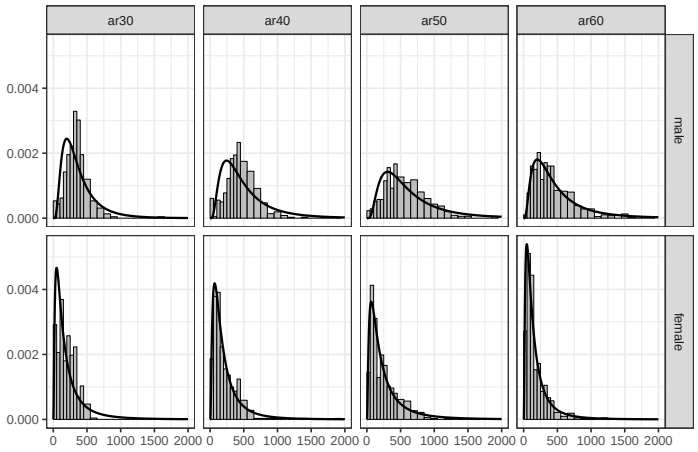

図 1: 性別・年齢階層ごとの個人収入の客観分布（SSP2015 データ，実線は推定された対数正規分布）．石田（2019）から転載

図 2 は，「収入について，現代日本社会おける最高水準を 10，最低の水準を 1 とすると，現在のあなたご自身はどの位にあたると思われますか」という質問に対する回答を属性カテゴリーごとにまとめたヒストグラムである．収入分布が正の歪度を持つ対数正規分布によく近似していたのに対して，収入評価は，真ん中の 4 から 6 あたりに回答が集まっている．

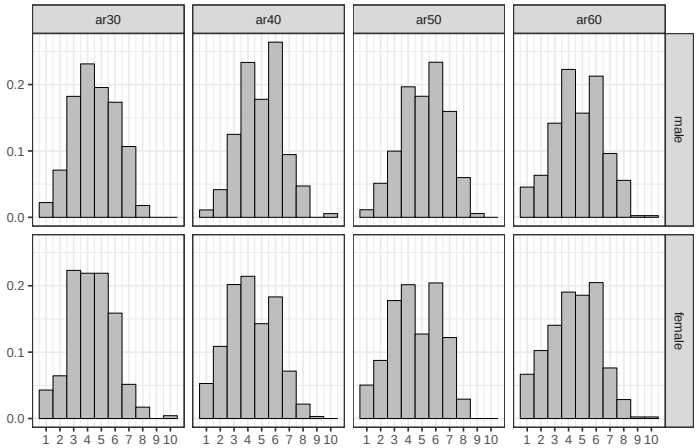

図 2: 性別・年齢階層ごとの収入評価の分布（SSP2015 データ）．石田（2019）から転載

もし人々の自己評価が客観的状況を正確に反映しているのであれば，二つのヒストグラムの歪度の符号は一致するはずである．しかしデータによればそれは一致するはずだが，集計したデータはその不一致を示唆している．これより，客観的資源分布と主観的自己評価の分布はなぜズレるのか？より一般的に言い換えれば，正の歪度を持つ客観的資源分布から歪度が 0 に近い主観的評価の分布が発生するメカニズムは何か？という問いが生まれる．

この問いに対する直感的な説明は,「人々が自分にとって身近な他者を比較対象として選んだ結果，客観的分布からズレた自己評価を持つのだろう」というものである．

個人が，集団内での自分の地位に満足するか，不満を感じるかどうかは，比較の対象となる他者の状態に依存する．この説得的なアイデアは，社会学における古典的理論の一つである「準拠集団理論 (Merton 1957=1961)」ないし「相対的剥奪理論 (Stouffer et. al. 1949)」として，斯界で広く知られている [3)]．同様の考え方は，経済学においては「相対所得仮説 (Duesenberry 1949; Easterlin 1974)」と呼ばれ，人々の所得満足度や生活満足度や主観的幸福感を説明する理論として，しばしば活用されている (Clark and Oswald 1996; Mcbride 2001; Ferrer-i-Carbonell 2005; Luttmer 2005; Ball and Chernova 2008)．

相対的剥奪は数学的定式化の進んだ概念の一つであり，経済学者イツハキによる指数の開発は，その先駆的な例である．イツハキは，社会心理学者ランシマンによる相対的剥奪概念の定義 (Runciman 1966) をふまえ，所得比較に基づく社会的な相対的剥奪指数を考案した．彼は社会レベルでの相対的剥奪指数を平均所得で基準化した値が，社会全体のジニ係数と等しいことを証明した (Yitzhaki 1979)．イツハキの相対的剥奪指数は，その後多くの発展的理論研究を生み出した (Hey and Lambert 1980; Kakwani 1984; Berrebi and Silber 1985; Chakravarty et al. 1995; Ebert and Moyes 2000)．

さらに，相対的剥奪指数は生活・収入満足度 (D'Ambrosio and Frick 2004; 石田 2011, 2014),

健康指標 (Eibner and Evans 2005;Kondo et al. 2008; Stewart, 2006; Subramanyam et al. 2009; Oshio et al. 2011), 階層帰属意識（Maeda and Ishida 2013) を説明する変数としても，国内外の多くの実証研究で利用されている．

1.1 先行研究の問題点

イツハキの相対的剥奪指数を用いた実証研究には以下の問題点がある．

- 相対的剥奪指数をデータから計算したノンパラメトリックな説明変数として利用しているため，理論的なインプリケーションを導出できない．
- model misspecification bias が生じている．
- 効果量を示すパラメータが一致性を満たさない．
- 準拠集団の選択範囲が $(0, \infty)$ であることが原因で，モデル上で仮定した準拠集団選択プロセスからはじめに示した分布のズレを説明できない．その結果準拠集団理論の従来の知見との整合性がない．

これらの問題点を以下の方法で解決する．

- 相対的剥奪指数をパラメトリックな推定量として再構成する．
- 準拠集団の選択範囲が実質的に有限の範囲に限定されるようにイツハキモデルを一般化する．そのために δ 近傍モデル（浜田 2001）を利用する．
- 理論モデルをベイズ統計モデルで表現することで準拠集団理論の構造推定を実装する．その結果として model misspecification bias を減少させる

1.2 本稿の目的

先行研究の問題点を解決することで本稿が目指す目的は以下の 2 つである．

- Yitzhaki Index(Yitzhaki 1979). と δ 近傍モデル（浜田 2001）を統合し，より体系的な理論モデルを提案する．
- δ 近傍モデルと Yitzhaki Index を統合した新しい理論モデルが既存のモデルよりも経験的に妥当であることをデータで示す

2 準拠集団理論の数理モデル

2.1 δ 近傍モデルの概要

δ 区間モデルは，収入満足度を説明するために，連続変数（所得）上の本人位置を中心に準拠集団範囲を自然な近さで表現した数理モデルである (浜田 2001)．他者選択プロセスを積分（汎関数

期待値）で表現する点がイツハキの相対的剥奪指数と共通しており，剥奪指数の特殊例と位置づけることができる (石田 2011).

モデルの基本的な考え方は,「人々は自分の客観的な所得分布上の近隣から準拠集団を選択し, それとの比較によって相対的な満足/不満足度を決定する (浜田 2001)」というものである．準拠集団は自分と経済的地位が近い人からなり，遠く離れた人は比較対象として選ばれない．ここでいう「近い」「遠い」は，次に定義する δ 区間に他者が含まれるかどうかによって区別される.

定義 1 (δ 区間)**.** 所得額 x の分布上の近隣を開区間

$$(x-\delta_l, x+\delta_u) = \{z | x-\delta_l < z < x+\delta_u\} \quad \text{ただし} \min\{\delta_l, \delta_u\} \geq 0$$

で表し，これを x の δ **近傍**と呼ぶ. δ_l, δ_u は x から見た比較対象の他者（準拠集団）の所得数直線上の最大距離を表している

モデルを構成する基本仮定は次の通りである.

- 所得分布は非負のサポートを持つ確率変数 X で近似できる. 確率変数 X の確率密度関数を $f(x)$ で表す
- x で確率変数 X の実現値を表す. 所得 x を含む近傍，$(x-\delta_l, x+\delta_u)$ の範囲に含まれる所得の割合は，確率密度関数 $f(t)$ を $x-\delta_l$ から $x+\delta_u$ の範囲で積分した値に等しい.

$$P(x-\delta_l < X < x+\delta_u) = \int_{x-\delta_l}^{x+\delta_u} f(t)dt. \tag{1}$$

- 所得値が x である個人は, $(x-\delta_l, x+\delta_u)$ の範囲内から準拠集団を選択する.
- 所得 x である個人が所得 $z \in (x-\delta_l, x+\delta_u)$ である他者 (準拠集団) を選択する条件付確率密度は, 確率密度関数 $f(z)$ を定積分 (1) で除して基準化した関数により定まる [4]. すなわち,

$$\frac{f(z)}{\int_{x-\delta_l}^{x+\delta_u} f(t)dt} \quad \text{ただし } z \in (x-\delta_l, x+\delta_u) \tag{2}$$

  である. この関数 (2) は開区間 $(x-\delta_l, x+\delta_u)$ で z に関して積分すれば 1 になる.
- 関数 (2) を用いた条件付き期待値は, 準拠集団の平均所得 $E[X|x-\delta_l < X < x+\delta_u]$ である [5].

$$E[X|x-\delta_l < X < x+\delta_u] = \int_{x-\delta_l}^{x+\delta_u} z \frac{f(z)}{\int_{x-\delta_l}^{x+\delta_u} f(t)dt} dz$$

- 準拠集団平均所得を $x^* = E[X|x-\delta_l < X < x+\delta_u]$ で表す．ある個人の収入に対する満足度は, 自分の所得 x と準拠集団平均所得 x^* の関数として決まる: $u(x, x^*)$

以上の基本仮定が《δ 近傍モデル》の要諦であった (浜田 2001).

2.2　Yitzhaki Index の概要

本節では，Yitzhaki Index の定義を簡単に確認する．まず所得 x を持つ個人から見て他者の所得を z とおき，他者との比較から生じる剥奪度を

$$D(x,z) = \begin{cases} z - x, & x < z \\ 0, & x \geq z \end{cases}$$

とおく．この関数 $D(x,z)$ は《自分 x と，ある一人の他者 z を比較した場合の剥奪度》である．当然 $D(x,z)$ の値は，比較対象となる他者 z の所得階層上の位置によって異なる．したがって，社会に存在する全ての他者と自分を比較した場合の剥奪度の平均値が，ある個人 x にとっての《相対的剥奪度》である．これを $D(x,\infty)$ で定義する．

定義 2 (相対的剥奪度 Yitzhaki Index of Relative Deprivation)**.**

$$D(x,\infty) = \int_0^\infty d(x,z)f(z)dz$$

記号 $D(x,z)$ と $D(x,\infty)$ の違いは，準拠集団の選択範囲の違いを表している．つまり前者は 1 点 z から他者を選び，後者は半開区間 $[0,\infty)$ から他者を z の分布にしたがって選んでいる．

同様に《ある一人の他者 z と自分 x を比較した場合の満足度 $S(x,z)$》を

$$S(x,z) = \begin{cases} 0, & x \leq z \\ x - z, & x > z \end{cases}$$

と定義する [6]．その（z に関する）平均値を相対的満足度と呼ぶ．

定義 3 (相対的満足度 Yitzhaki Index of Relative Satisfaction)**.** 相対的満足度 $S(x,\infty)$ は $S(x,z)$ の平均として，次のように定式化できる．

$$S(x,\infty) = \int_0^\infty S(x,z)f(z)dz$$

$D(x,\infty)$ および $S(x,\infty)$ は Yitzhaki(1979), Hey and Lambert(1980) が定式化した相対的剥奪度と相対的満足度である [7]．

2.3　Yitzhaki Index と δ 近傍モデルの違い

2 つのモデルは「他者との比較（差）によって自分の満足度が決まる」という基本仮定を共有しているが，以下の点について違いがある．

- 準拠集団の選択範囲: Yitzhaki モデルは，社会にいる全ての他者が比較の対象となっている．他方で δ 近傍モデルは，自分から見て一定距離内の他者だけを比較対象とする．
- 効用関数の定義: Yitzhaki モデルでは効用関数が他者の所得額に応じて条件分岐する関数だが，で δ 近傍モデルは一定である．
- 確率密度関数のウェイト: Yitzhaki モデルでは積分する際に確率密度関数にウェイトを用いる必要がない．一方，δ 近傍モデルは条件付き確率分布を用いるので，確率密度関数は適切なウェイトを要する．
- 準拠集団の影響: Yitzhaki モデルでは，準拠集団のうち影響を与える者が一部に限定される．一方で δ 近傍モデルでは，影響を及ぼす他者のみを準拠集団として定義する．

このように，2 つのモデルには明確な違いがある．

3 命題

準備が整ったので，本節では Yitzhaki Index と δ 近傍モデルの関係を数学的に明らかにする．まず δ 近傍モデルの効用を定義する．

定義 4 (δ 近傍モデルの効用)**.**

$$U_\delta(x, \delta_l, \delta_u) = x - \int_{x-\delta_l}^{x+\delta_u} z \frac{f(z)}{\int_{x-\delta_l}^{x+\delta_u} f(t)dt} dz$$

この効用から，Yitzhaki Index を導出する．

命題 1 (相対的剥奪の極限定理)**.** δ 近傍モデル上の効用の極限は，Yitzhaki Index の関数（相対的満足度と相対的剥奪度の差）である．

$$\lim_{\substack{\delta_l \to \infty \\ \delta_u \to \infty}} U_\delta(x, \delta_l, \delta_u) = S(x, \infty) - D(x, \infty)$$

証明. 効用の定義より

$$U_\delta(x, \delta_l, \delta_u) = x - \int_{x-\delta_l}^{x+\delta_u} z \frac{f(z)}{\int_{x-\delta_l}^{x+\delta_u} f(t)dt} dz$$

ここで $\delta_l \to \infty, \delta_u \to \infty$ とおく．

$$
\begin{aligned}
\lim_{\substack{\delta_l\to\infty\\ \delta_u\to\infty}} U_\delta(x,\delta_l,\delta_u) &= x - \int_{-\infty}^{\infty} z\frac{f(z)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt}dz \\
&= x - \int_{0}^{\infty} z\frac{f(z)}{\int_{0}^{\infty} f(t)dt}dz = x - \int_{0}^{\infty} zf(z)dz \\
&= x\int_{0}^{\infty} f(z)dz - \int_{0}^{\infty} zf(z)dz = \int_{0}^{\infty}(x-z)f(z)dz \\
&= \int_{0}^{x}(x-z)f(z)dz + \int_{x}^{\infty}(x-z)f(z)dz \\
&= \int_{0}^{x} S(x,z)f(z)dz - \int_{x}^{\infty} D(x,z)f(z)dz \\
&= \int_{0}^{x} S(x,z)f(z)dz + \int_{x}^{\infty} S(x,z)f(z)dz \\
&\quad - \left(\int_{x}^{\infty} D(x,z)f(z)dz + \int_{0}^{x} D(x,z)f(z)dz\right) \\
&= \int_{0}^{\infty} S(x,z)f(z)dz - \int_{0}^{\infty} D(x,z)f(z)dz = S(x,\infty) - D(x,\infty)
\end{aligned}
$$

1 段目から 2 段目は $f(x)$ のサポートが非負であるという仮定を用いた．この結果は δ 近傍モデルの効用は，特定条件下では $S(x,\infty) - D(x,\infty)$ という 2 つの Yitzhaki Index の差として表せることを意味する．

$$
\begin{aligned}
\lim_{\substack{\delta_l\to\infty\\ \delta_u\to\infty}} U_\delta(x,\delta_l,\delta_u) &= S(x,\infty) - D(x,\infty) \\
&= \text{相対的満足度} - \text{相対的剥奪度}
\end{aligned}
$$

□

系 2 (平均剥奪)**.** 社会の全成員が準拠集団であるとき，比較から得た効用は $x - \mu$ となる．つまり平均 μ だけ低下する．

$$
\lim_{\substack{\delta_l\to\infty\\ \delta_u\to\infty}} U_\delta(x,\delta_l,\delta_u) = S(x,\infty) - D(x,\infty) = x - \mu
$$

証明. 前命題の証明より

$$
\begin{aligned}
\lim_{\substack{\delta_l\to\infty\\ \delta_u\to\infty}} U_\delta(x,\delta_l,\delta_u) &= \lim_{\substack{\delta_l\to\infty\\ \delta_u\to\infty}} \left(x - \int_{x-\delta_l}^{x+\delta_u} z\frac{f(z)}{\int_{x-\delta_l}^{x+\delta_u} f(t)dt}dz\right) \\
&= x - \int_{-\infty}^{\infty} z\frac{f(z)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt}dz \\
&= x - \int_{0}^{\infty} zf(z)dz = x - \mu
\end{aligned}
$$

これは，Hey and Lambert （1980）が示した命題

$$D(x,\infty) - S(x,\infty) = \mu - x$$

からの直接的な帰結でもある．

□

この系自体は，自明である．しかし符号を反転しただけなく，δ 近傍モデルの効用と対応させることで，$S(x,\infty) - D(x,\infty)$ の持つ社会科学的な意味が明確になる．

系 3 (Yitzhaki Index による客観的所得分布と主観的効用分布の一致)**.** 系 2 の結果から，社会の全成員が準拠集団であるとき，比較から得た効用の分布は，客観的所得 x から平均だけ移動した分布である．したがって x の確率分布と $x-\mu$ の確率分布の歪度は一致する．

この系が示しているのは，Yitzhaki Index によって，客観的所得分布と主観的効用分布のズレは説明できない，という論理的な事実である．

3.1 不完全相対的剥奪度と満足度

δ 近傍が $(0,\infty)$ まで拡大したとき，所得比較の結果得る効用は，Yitzhaki が定式化した相対的満足度と相対的剥奪度の差と一致する．つまり δ 近傍が予測する効用は，相対的な満足と不満の総合的な評価であり，Yitzhaki Index は正の効用と負の効用をそれぞれ異なる期待値で定義した指数である．

ここで $D(x,z)$ をベースに，準拠集団の選択範囲が有限の範囲に限定される場合の（局所的な）期待値を考えてみよう．これを不完全相対的剥奪度（incomplete relative deprivation）$D(x,\delta_u)$ と呼ぶ．

$$D(x,\delta_u) = \int_0^{x+\delta_u} D(x,z)\frac{f(z)}{\int_0^{x+\delta_u} f(t)dt}dz$$

積分の上端が ∞ から $x+\delta_u$ までに制限されるために，他者の所得の確率密度関数も $\int_0^{x+\delta_u} f(t)dt$ によって正規化する必要がある．このとき $\lim_{\delta_u\to\infty} D(x,\delta_u) = D(x,\infty)$ である．同様に，不完全相対的満足度 $S(x,\delta_l)$ は

$$S(x,\delta_l) = \int_{x-\delta_l}^{\infty} S(x,z)\frac{f(z)}{\int_{x-\delta_l}^{\infty} f(t)dt}dz$$

と定義できる．

このとき $\lim_{\delta_l\to\infty} S_{\delta_l}(x) = S(x,\infty)$ 自然にが成立する．

不完全相対的剥奪度・相対的満足度は Yitzhaki の（完全）相対的剥奪度・相対的満足度と δ 近傍モデルを接合する理論的な概念であり，Yitzhaki index の経験的な妥当性を高めるための工夫でもある．

3.1.1 ガンマ分布のもとでの不完全相対的剥奪度

不完全相対的剥奪度をパラメトリックに計算するために，所得分布を近似する確率分布としてガンマ分布を仮定する．

定義 5 (ガンマ分布)**.** 実現値の範囲を $x \in \mathbb{R}^+$ とおく．パラメータ: $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}^+$ であるガンマ分布を確率密度関数

$$\mathrm{Gamma}(x|a,b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx}$$

で定義する．このとき平均: a/b，標準偏差: $\sqrt{a}/b$ である．

定義 6 (ガンマ関数)**.** ガンマ関数 $\Gamma(a)$，第一種不完全ガンマ関数 $\gamma(a,z)$，第二種不完全ガンマ関数 $\Gamma(a,z)$ を

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt, \qquad \gamma(a,z) = \int_0^z t^{a-1} e^{-t} dt, \qquad \Gamma(a,z) = \int_z^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$$

と定義する．（第二種不完全ガンマ関数は Mathematica の定義 `Gamma[a, z]` と一致する）

以下では次の形の確率密度関数の積分を多用するので，あらかじめ補題として明示しておく．

補題 1.

$$\int_0^d \mathrm{Gamma}(t|a,b) dt = \frac{\gamma(a,bd)}{\Gamma(a)}$$

証明.

$$\begin{aligned}
\int_0^d \mathrm{Gamma}(t|a,b) dt &= \int_0^d \frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-bt} dt \\
&= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^{bd} \left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} e^{-x} \frac{dt}{dx} dx \qquad bt = x \text{ と変換} \\
&= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^{bd} \left(\frac{1}{b^{a-1}} \frac{1}{b}\right) x^{a-1} e^{-x} dx \\
&= \frac{b^a}{\Gamma(a) b^a} \int_0^{bd} x^{a-1} e^{-x} dx = \frac{\gamma(a,bd)}{\Gamma(a)}
\end{aligned}$$

□

つまりガンマ分布の確率密度関数 $\mathrm{Gamma}(t|a,b)$ を 0 から有限の値 d まで積分すると，その結果は，不完全ガンマ関数 $\gamma(a,bd)$ とガンマ関数 $\Gamma(a)$ の比となる．以下では不完全ガンマ関数を，「準

拠集団が有限の範囲から選択されること」を数学的に表現するために用いる．逆に言えば,,「準拠集団が有限の範囲から選択される場合の相対的剥奪度（満足度）」を「不完全相対的剥奪度（満足度）」という用語で定義したのは，このためである．

さらに次の補題を導入しておく．証明はいずれも補題 1 同様の置換積分を適用すればよい．

補題 2.

$$\int_c^d \mathrm{Gamma}(t|a,b)dt = \frac{\gamma(a,bd)-\gamma(a,bc)}{\Gamma(a)}$$

補題 3.

$$\int_c^d t \times \mathrm{Gamma}(t|a,b)dt = \frac{\gamma(a+1,bd)-\gamma(a+1,bc)}{\Gamma(a)b}$$

補題 4.

$$\int_c^\infty \mathrm{Gamma}(t|a,b)dt = \frac{\Gamma(a,bc)}{\Gamma(a)}$$

以下この補題を用いて不完全相対的剥奪度 $D(x,\delta_u)$ を計算する．

命題 4 (所得がガンマ分布に従う場合の不完全相対的剥奪度 $D(x,\delta_u)$)**.** $Z \sim \mathrm{Gamma}(a,b)$ と仮定する．このとき

$$D(x,\delta_u) = \frac{1}{\gamma(a,b(x+\delta_u))}\left(\frac{\gamma_1}{b} - x\gamma_2\right)$$

$$\text{where} \quad \gamma_1 = \gamma(a+1,(x+\delta_u)b) - \gamma(a+1,xb)$$

$$\gamma_2 = \gamma(a,(x+\delta_u)b) - \gamma(a,xb)$$

証明. まず正規化項 $C(x,\delta_u)$ を補題 1 より

$$C(x,\delta_u) = \int_0^{x+\delta_u} \mathrm{Gamma}(t|a,b)dt = \frac{\gamma(a,b(x+\delta_u))}{\Gamma(a)}$$

と定義する．

次に補題 2,3 を適用する．

$$D(x,\delta_u) = \int_0^{x+\delta_u} D(x,z)\frac{f(z)}{C(x,\delta_u)}dz = \frac{1}{C(x,\delta_u)}\int_0^{x+\delta_u} D(x,z)f(z)dz$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{C(x,\delta_u)}\left(\int_0^x 0\cdot f(z)dz + \int_x^{x+\delta_u}(z-x)f(z)dz\right)\\
&= \frac{1}{C(x,\delta_u)}\left(\int_x^{x+\delta_u} zf(z) - \int_x^{x+\delta_u} xf(z)dz\right)\\
&= \frac{1}{C(x,\delta_u)}\left(\frac{\gamma(a+1,(x+\delta_u)b)-\gamma(a+1,xb)}{\Gamma(a)b}\right.\\
&\qquad \left.-x\frac{\gamma(a,(x+\delta_u)b)-\gamma(a,xb)}{\Gamma(a)}\right)\\
&= \frac{\Gamma(a)}{\gamma(a,b(x+\delta_u))}\left(\frac{1}{b}\left\{\frac{\gamma(a+1,(x+\delta_u)b)-\gamma(a+1,xb)}{\Gamma(a)}\right\}\right.\\
&\qquad \left.-x\left\{\frac{\gamma(a,(x+\delta_u)b)-\gamma(a,xb)}{\Gamma(a)}\right\}\right)
\end{aligned}
$$

□

上記の不完全相対的剥奪度を含む統計モデルを Stan で使う場合，次の点に注意する必要がある．Stan では不完全ガンマ関数を

$$
\text{gamma_p}(a,z) := \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^z t^{a-1}e^{-t}dt = \frac{\gamma(a,z)}{\Gamma(a)}
$$

と定義しているので，たとえばコード上で

$$
\frac{\gamma(a,(x+\delta_u)b)-\gamma(a,xb)}{\Gamma(a)}
$$

を表現するには，$\text{gamma_p}(a,(x+\delta_u)b) - \text{gamma_p}(a,xb)$ と指定しなければならない．

命題 5 (ガンマ分布のもとでの完全相対的剥奪度)**.**

$$
\lim_{\delta_u\to\infty} D(x,\delta_u) = D(x,\infty)
$$

を完全相対的剥奪度と定義する．

所得がガンマ分布 $\text{Gamma}(x|a,b)$ にしたがうとき

$$
\lim_{\delta_u\to\infty} D(x,\delta_u) = \frac{\Gamma(a+1,bx)}{\Gamma(a)} - x\frac{\Gamma(a,bx)}{\Gamma(a)}
$$

である．

証明.

$$\lim_{\delta_u\to\infty} D_{\delta_u}(x) = \lim_{\delta_u\to\infty}\int_0^{x+\delta_u} D(x,z)\frac{f(z)}{C(x,\delta_u)}dz = \int_0^{\infty} D(x,z)\frac{f(z)}{1}dz$$
$$= \int_x^{\infty} xf(z)dz - x\int_x^{\infty} f(z)dz = \frac{\Gamma(a+1,bx)}{\Gamma(a)} - x\frac{\Gamma(a,bx)}{\Gamma(a)}$$

□

3.1.2 不完全相対的満足度の計算

前節と同様の手順で，所得がガンマ分布に従う場合の不完全相対的満足度を計算する．

命題 6.

$$S(x,\delta_l) = \int_{x-\delta_l}^{\infty} S(x,z)\frac{f(z)}{C(x,\delta_l)}dz$$
$$= \frac{1}{\Gamma(a,b(x-\delta_l))}(x\gamma_1 - \gamma_2/b)$$
$$\gamma_1 = \gamma(a,bx) - \gamma(a,b(x-\delta_l))$$
$$\gamma_2 = \gamma(a+1,bx) - \gamma(a+1,b(x-\delta_l))$$

証明. 正規化項は補題 4 を用いて計算する．その先の計算は不完全相対的剥奪度の場合と同様に，補題 2 と補題 3 を適用すればよい． □

3.1.3 δ 近傍モデルの効用の計算

δ 近傍モデルの効用は，Yitzhaki Index のように，満足度と剥奪度を別々に定義せず，自分とローカルな他者の所得の差を総合的に効用に変換する．

補題 1,2,3 を適用すれば次を得る．

命題 7 (所得がガンマ分布に従う場合の δ 近傍モデルの効用)**.**

$$U_\delta(x,\delta_l,\delta_u) = x - \int_{x-\delta_l}^{x+\delta_u} z\frac{f(z)}{\int_{x-\delta_l}^{x+\delta_u} f(t)dt}dz$$
$$= x - \frac{\frac{1}{\Gamma(a)}\frac{1}{b}\{\gamma(a+1,b(x+\delta_u)) - \gamma(a+1,b(x-\delta_l))\}}{\frac{1}{\Gamma(a)}\{\gamma(a,b(x+\delta_u)) - \gamma(a,b(x-\delta_l))\}}$$

3.2 不完全相対的剥奪度と満足度の性質

本節では，不完全相対的剥奪度 $D(x,\delta_u)$ と満足度 $S(x,\delta_l)$ の性質を数値計算から確認する．直感的な理解を促すために相対的剥奪度の符号を反転し，負の方向が不満となるように調整した．

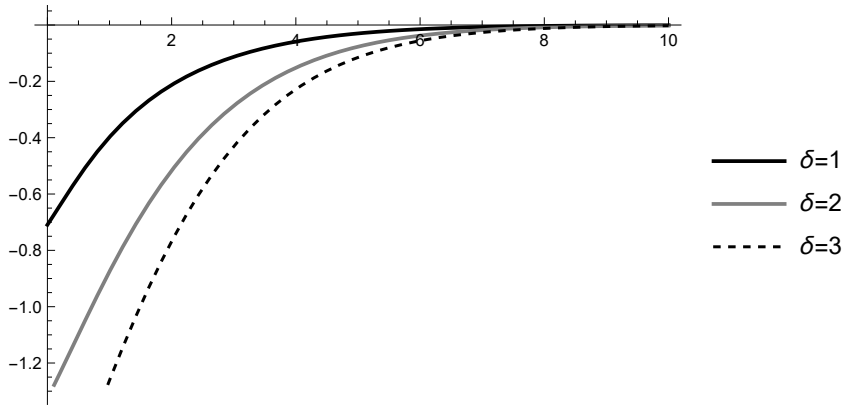

図 3: 不完全相対的剥奪度（符号反転）．横軸は客観所得で縦軸は満足度（下にいくほど不満）．所得分布は Gamma$(x|3,1)$ を仮定.（plot 用コードは Mathematica 12 で作成.　/delta/unified_delta.nb）
.

図 3 は客観所得（横軸）に対応した不完全相対的剥奪度（縦軸，符号反転）の変化である．　各曲線は準拠集団の選択範囲 $\delta_u = 1, 2, 3$ に対応し，曲線が下にあるほど不満であることを表す．この図から，次のインプリケーションが読み取れる．

- 不完全相対的剥奪度は，客観的所得 x が増加するほど小さくなる．ただし減少の度合いは x が増加するにつれ段々と小さくなる．
- 不完全相対的剥奪度は，客観的所得が増加するほど，0 に近づく．
- 高層よりも下の所得階層では，準拠集団の選択範囲が広いほど，不完全相対的剥奪度は大きくなる（符号反転させたグラフ上では曲線がより下に位置する）
- 準拠集団の選択範囲の違いによる剥奪度への影響は，客観的所得階層が高くなるほど弱くなり，やがて消失する

実際，上述した各インプリケーションは以下のように証明できる．

命題 8 (不完全相対的剥奪度)**.** 不完全相対的剥奪度は，客観的所得に関して減少関数（符号反転したグラフでは増加関数に見える）であり，2 階導関数は負である．

証明. □

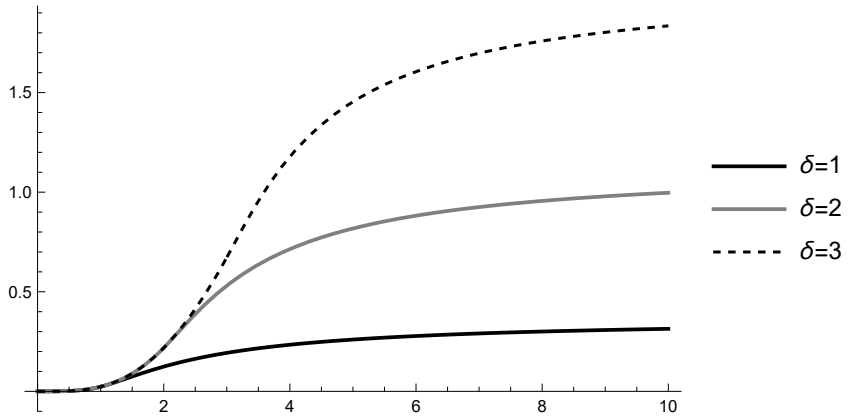

図 4: 不完全相対的満足．横軸は客観所得で縦軸は満足度（上にいくほど満足）．所得分布は $\mathrm{Gamma}(x|3,1)$ を仮定，

次に図 4 は不完全相対的満足度を $\delta = 1, 2, 3$ で変化させた場合の比較である．曲線は値が大きいほど満足であることを表す．この図から，次のインプリケーションが読み取れる．

- 不完全相対的剥奪度は，客観的所得に関して増加関数であり，2 階導関数は負である．
- 不完全相対的満足度は，客観的所得が増加するほど，大きくなる．
- 低層よりも上の所得階層では，準拠集団の選択範囲が広いほど，不完全相対的満足度が大きくなる．
- 準拠集団の選択範囲の違いによる剥奪度への影響は，客観的所得階層が低いほど弱くなり，0 付近では消失する．

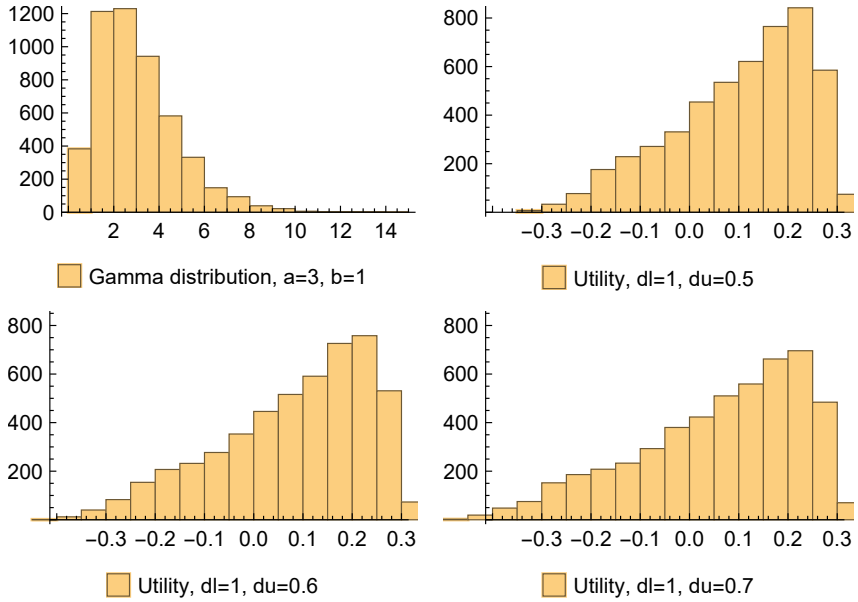

図 5: 客観的所得分布と主観的経済的地位の関係．所得分布は $\mathrm{Gamma}(x|3,1)$ を仮定

図 5 は，客観的な所得分布と，その分布のもとで準拠集団との比較の結果として生じる経済的地位の自己評価分布を示している．左上が Gamma$(x|3,1)$ に従う所得分布である．残りの三つのヒストグラムは各個人について不完全相対的満足度から不完全相対的剥奪度を引いた値の分布である．直感的に言えばこれらは，準拠集団と比較した結果として定まる経済的地位の自己評価の分布を表している．

この計算例は完全相対的剥奪度（準拠集団の選択範囲が $[0,\infty)$ である Yitzhaki のオリジナルの定義）では，客観所得と主観的経済地位のズレを説明できないが，われわれが一般化した理論モデル（不完全相対的剥奪度）ならば，そのズレの生成プロセスを表現できる可能性があることを示唆している．

4　データによるモデルの検証

4.1　データで確認すべき仮説

Yitzhaki Index あるいはその拡張としての不完全相対的剥奪度/満足度と δ 近傍モデルの効用は，どちらも客観的所得に対する主観的満足度あるいは主観的経済地位の説明に有用な理論モデルである．

理論モデルの経験的妥当性を確認するために，理論モデルから導出したインプリケーションが現実に成立するかどうかをデータを使って検証する．不完全相対的剥奪度（理論モデル）から得たインプリケーションを，データで確認するための（統計モデルによる分析のための）作業仮説を以下にまとめておく．

仮説 1. 不完全相対的剥奪度 $D(x,\delta_u)$ は，経済的地位の自己評価に負の影響を及ぼす．

この仮説を検討するための統計モデルを次のように定義する．

不完全相対的剥奪度の統計モデル

$$
\begin{aligned}
D_{\delta_u}[i] &= \int_0^{X[i]+\delta_u} D(X[i],z)\frac{f(z)}{C_{\delta_u}(X[i])}dz \\
&\quad z \sim \mathrm{Gamma}(a,b), \qquad \varepsilon \sim \mathrm{Normal}(0,\sigma^2), \quad \delta_u \sim \mathrm{Uniform}(0,10) \\
Y[i] &= \beta_0 + \beta_1 D_{\delta_u}[i] + \varepsilon \\
Y[i] &\sim \mathrm{Normal}(\beta_0 + \beta_1 D_{\delta_u}[i], \sigma^2) \\
Y[i] &: \text{経済的地位の自己評価}, X[i] : \text{個人所得}
\end{aligned}
$$

$f(z)$ は個人年収分布の確率密度関数である．対数正規分布とガンマ分布による近似を比較したところ，自由エネルギーの観点からガンマ分布が対数正規分布と同等以上に個人年収データにフィッ

トすることが確認できたので，ここではガンマ分布にしたがうことを仮定する．またそのパラメータ a, b は事前に所得データから推定した最尤推定値を代入して用いる．

ε は誤差項であり，応答変数 $Y[i]$ は決定論的な関数 $\beta_0 + \beta_1 D_{\delta_u}[i]$ と誤差項 ε の和で決定される．よって Y の確率モデルは誤差項 ε の分布の平均を $\beta_0 + \beta_1 D_{\delta_u}[i]$ だけ移動した分布である．ここで β_1 は

次に，同じ年齢階層の他者を準拠集団として選択する場合を考える．準拠集団に関する一連の実証研究が重視してきた課題の一つは，準拠集団選択メカニズムの特定である．準拠集団がどのような基準で選ばれるのかという問題は，マートンが理論を提唱して以来，解が定まらぬ経験的難問である (Merton 1957=1961; Eibner and Evans 2005; Ferrer-i-Carbonell 2005; 前田 2014)．これまでに幸福感や満足度に関する実証研究では，年齢・学歴・居住地域・職業・国全体など種々の基準を用いて準拠集団を操作的に定義してきた (Ferrer-i-Carbonell 2005; Kondo et al. 2008, 2009; Oshio et al 2011; 石田 2011)．

年齢階層が同じ他者を準拠集団として選択する，という仮定を追加した場合，社会全体で共通の所得分布を仮定するのではなく，年齢階層毎に異なる所得分布を仮定する必要がある．年齢階層 k の所得分布の確率密度関数を

$$f(x|a_k, b_k)$$

とおけば，年齢階層 k に属している個人の相対的剥奪度は

$$D(x, \infty) = \int_0^\infty D(x, z) f(z|a_k, b_k)$$

である．ゆえにこの仮定の下で統計モデルは

不完全相対的剥奪度の統計モデル（年齢階層モデル）

$$\begin{aligned}
D_{\delta_u}[i] &= \int_0^{X[i]+\delta_u[j(i)]} D(X[i], z_{j(i)}) \frac{f(z_{j(i)}|a_{j(i)}, b_{j(i)})}{C_{\delta_u[j(i)]}(X[i]|a_{j(i)}, b_{j(i)})} dz_{j(i)} \\
z_j &\sim \mathrm{Gamma}(a_j, b_j), \qquad \varepsilon \sim \mathrm{Normal}(0, \sigma^2) \\
\delta_u[j] &\sim \mathrm{Uniform}(0, 10) \\
Y[i] &\sim \mathrm{Normal}(\beta_0[j(i)] + \beta_1[j(i)] D_{\delta_u}[i] + \beta_2[j(i)] S_{\delta_l}[i], \sigma^2) \\
Y[i] &: \text{経済的地位の自己評価}, X[i] : \text{個人所得} \\
i &= 1, 2, ..., n \qquad j = 1, 2, ..., 5
\end{aligned}$$

となる．

ここで添え字 $j = 1, 2, ..., 5$ は 20 代，30 代，40 代，50 代，60 代からなる年齢別のグループに対応する．

4.1.1　統制変数：年齢の影響

また不完全相対的剥奪度それ自体が客観所得 x の関数だから，その影響の存在は，客観所得にかんしてリニアではなく，客観所得階層が増加するほど弱くなることも同時に示す．

-
- 不完全相対的満足度 $S(x, \delta_l)$ は，経済的地位の自己評価にプラス の影響を及ぼす．その影響はリニアではなく，客観所得階層が増加するほど弱くなる
- 経済的地位の自己評価に対する不完全相対的剥奪度の負の影響は，客観的所得階層が低いほど大きい
- 経済的地位の自己評価に対する不完全相対的満足度の正の影響は，客観的所得階層が高いほど大きい
- 客観的所得が同じであれば δ_u が大きい人ほど，経済的地位の自己評価が低い
- 客観的所得が同じであれば δ_l が大きい人ほど，経済的地位の自己評価が高い

4.2　統計モデルの定義

以上の考察を踏まえて統計モデルを定義する．

まずベースラインのモデルとして，Yitzhaki Index（完全相対的剥奪度/満足度）による経済的地位の自己評価説明モデルを定義する．命題 1 と系 2 より，完全相対的剥奪度と満足度を総合した効用は次の通りである．

完全相対的剥奪度/満足度（Yitzhaki モデル）

$$
\begin{aligned}
m[i] &= X[i] - \mu, i = 1, 2, ..., n \\
\varepsilon &\sim \mathrm{Normal}(0, \sigma^2) \\
Y[i] &= \beta_0 + \beta_1 m[i] + \varepsilon \\
Y[i] &\sim \mathrm{Normal}(\beta_0 + \beta_1 m[i], \sigma^2) \\
Y[i] &: \text{経済的地位の自己評価}, X[i] : \text{個人所得}
\end{aligned}
$$

同じ年齢階層の他者のみを準拠集団として選択する場合は

$$
\begin{aligned}
m_{j(i)} &= X[i] - \mu_{j(i)}, \\
\varepsilon &\sim \mathrm{Normal}(0, \sigma^2) \\
Y[i] &= \beta_0[j(i)] + \beta_1[j(i)]m_{j(i)} + \varepsilon \\
Y[i] &\sim \mathrm{Normal}(\beta_0[j(i)] + \beta_1[j(i)]m_{j(i)}, \sigma^2) \\
Y[i] &: \text{経済的地位の自己評価}, X[i] : \text{個人所得} \\
i &= 1, 2, ..., n \qquad j = 1, 2, ..., 5
\end{aligned}
$$

である．ここで $j(i)$ は個人 i が属する年齢階層 j を表す．以下年齢階層として 20，30，40，50，60 代の 5 カテゴリーを仮定する（$j = 1, 2, ..., 5$）．

次に Yitzhaki Index で準拠集団の選択範囲を有限にとどめた修正モデル（不完全相対的剥奪度/満足度モデル）を定義する．

不完全相対的剥奪度/満足度モデル

$$
\begin{aligned}
D_{\delta_u}[i] &= \int_0^{X[i]+\delta_u} D(X[i], z) \frac{f(z)}{C_{\delta_u}(X[i])} dz \\
S_{\delta_l}[i] &= \int_{X[i]-\delta_l}^{\infty} S(X[i], z) \frac{f(z)}{C_{\delta_l}(X[i])} dz \\
z &\sim \mathrm{Gamma}(a, b), \qquad \varepsilon \sim \mathrm{Normal}(0, \sigma^2) \\
\delta_u &\sim \mathrm{Uniform}(0, 10), \delta_l \sim \mathrm{Uniform}(0, 10) \\
Y[i] &= \beta_0 + \beta_1 D_{\delta_u}[i] + \beta_2 S_{\delta_l}[i] + \varepsilon \\
Y[i] &\sim \mathrm{Normal}(\beta_0 + \beta_1 D_{\delta_u}[i] + \beta_2 S_{\delta_l}[i], \sigma^2) \\
Y[i] &: \text{経済的地位の自己評価}, X[i] : \text{個人所得}
\end{aligned}
$$

同じ年齢階層の他者のみを準拠集団として選択する場合は

$$
\begin{aligned}
D_{\delta_u}[i] &= \int_0^{X[i]+\delta_u[j(i)]} D(X[i], z_{j(i)}) \frac{f(z_{j(i)}|a_{j(i)}, b_{j(i)})}{C_{\delta_u[j(i)]}(X[i]|a_{j(i)}, b_{j(i)})} dz_{j(i)} \\
S_{\delta_l}[i] &= \int_{X[i]-\delta_l[j(i)]}^{\infty} S(X[i], z) \frac{f(z|a_{j(i)}, b_{j(i)})}{C_{\delta_l[j(i)]}(X[i]|a_{j(i)}, b_{j(i)})} dz \\
z_j &\sim \mathrm{Gamma}(a_j, b_j), \qquad \varepsilon \sim \mathrm{Normal}(0, \sigma^2) \\
\delta_u[j] &\sim \mathrm{Uniform}(0, 10), \delta_l[j] \sim \mathrm{Uniform}(0, 10) \\
Y[i] &= \beta_0[j(i)] + \beta_1[j(i)] D_{\delta_u}[i] + \beta_2[j(i)] S_{\delta_l}[i] + \varepsilon \\
Y[i] &\sim \mathrm{Normal}(\beta_0[j(i)] + \beta_1[j(i)] D_{\delta_u}[i] + \beta_2[j(i)] S_{\delta_l}[i], \sigma^2) \\
Y[i] &: \text{経済的地位の自己評価}, X[i] : \text{個人所得} \\
i &= 1, 2, ..., n \qquad j = 1, 2, ..., 5
\end{aligned}
$$

となる．

不完全相対的剥奪度/満足度モデルの実装コード例は以下の通りである．（`X[i]-dl>0` という制約の位置を修正する．不完全ガンマ関数の定義上，0 でなく完全ガンマ関数に置き換わる箇所がある．サンプリングエラーの原因はここ）

```
data {
    int<lower=0> N ;
    real<lower=0> X[N] ;//所得 1/200 scale
    real<lower=0> Y[N] ;//主観的経済地位
    real<lower=0> a;//ガンマ分布パラメータ
    real<lower=0> b;//ガンマ分布パラメータ

}

parameters {
    real beta0;real beta1;real beta2;
    real<lower=0,upper=5> sigma;
    real<lower=0,upper=10> du;
    real<lower=0,upper=10> dl;

}

transformed parameters {
    real C[N];real A[N];real B[N];real D[N];
    real C2[N];real A2[N];real B2[N];real S[N];
    real c[N];

    for(i in 1:N){
        if(X[i]-dl<0){c[i]=0;} else {c[i]=X[i]-dl;};
    }

    for(i in 1:N){
        C[i]=gamma_p(a,b*(X[i]+du));
        A[i]=(gamma_p(a+1,b*X[i]+b*du)-gamma_p(a+1,b*X[i]))/b;
        B[i]=X[i]*(gamma_p(a,b*X[i]+b*du)-gamma_p(a,b*X[i]));
        D[i]=(A[i]-B[i])/C[i];

        C2[i]=gamma_q(a,b*c[i]);
        A2[i]=X[i]*(gamma_p(a,b*X[i])-gamma_p(a,b*c[i]));
```

```
        B2[i]=(gamma_p(a+1,b*X[i])-gamma_p(a+1,b*c[i]))/b;
        S[i]=(A2[i]-B2[i])/C2[i];
    }
}

// X[i]-dl>0という制約が必要.


model {
    for( i in 1 : N ) {
        target += normal_lpdf(Y[i] |beta0+beta1*D[i]+beta2*S[i], sigma);
    }
    target += uniform_lpdf(sigma|0,5);
    target += normal_lpdf(beta0|0,100);
    target += normal_lpdf(beta1|0,100);
    target += uniform_lpdf(du|0,10);
    target += uniform_lpdf(dl|0,10);
}
```

不完全相対的剥奪度/満足度モデルの分析結果

237.795 seconds (Total)

事前分布

```
target += uniform_lpdf(du|0,30);
target += uniform_lpdf(dl|0,5);
```

	mean	sd	2.5%	97.5%	n_eff	Rhat
beta0	3.726097	0.06298489	3.6006978	3.8484827	615.6912	1.0175899
beta1	-1.089291	0.15852485	-1.3995561	-0.7870273	708.2005	1.0028295
beta2	0.825110	0.07189582	0.7002898	0.9856962	475.2181	1.0175089
sigma	1.326371	0.02545665	1.2790746	1.3784570	1286.6900	0.9993838
du	17.504357	7.61588703	4.4941569	29.4185708	549.8990	1.0111538
dl	2.957697	0.42043903	2.2031832	3.8838152	605.2323	1.0061262
lp__	-2384.894602	1.56156391	-2388.5683487	-2382.6987072	865.0187	1.0037579

β_1, β_2 の事後分布の平均は，仮説と整合的である．

次に δ 近傍モデルを定義する．

δ 近傍モデル

$$U[i] = X[i] - \int_{X[i]-\delta_l}^{X[i]+\delta_u} z \frac{f(z)}{\int_{X[i]-\delta_l}^{X[i]+\delta_u} f(t)dt} dz$$

$$z \sim \mathrm{Gamma}(a,b), \qquad t \sim \mathrm{Gamma}(a,b), \qquad \varepsilon \sim \mathrm{Normal}(0,\sigma^2)$$

$$\delta_u \sim \mathrm{Uniform}(0,10), \qquad \delta_l \sim \mathrm{Uniform}(0,10)$$

$$Y[i] = \beta_0 + \beta_1 U[i] + \varepsilon$$

$$Y[i] \sim \mathrm{Normal}(\beta_0 + \beta_1 U[i], \sigma^2)$$

$Y[i]$: 経済的満足度, $X[i]$: 個人所得

同じ年齢階層の他者のみを準拠集団として選択する場合は

$$
\begin{aligned}
U[i] &= X[i] - \int_{X[i]-\delta_l}^{X[i]+\delta_u} z \frac{f(z)}{\int_{X[i]-\delta_l}^{X[i]+\delta_u} f(t)dt} dz \\
z &\sim \mathrm{Gamma}(a,b), \qquad t \sim \mathrm{Gamma}(a,b), \qquad \varepsilon \sim \mathrm{Normal}(0,\sigma^2) \\
\delta_u &\sim \mathrm{Uniform}(0,10), \qquad \delta_l \sim \mathrm{Uniform}(0,10) \\
Y[i] &= \beta_0 + \beta_1 U[i] + \varepsilon \\
Y[i] &\sim \mathrm{Normal}(\beta_0 + \beta_1 U[i], \sigma^2) \\
Y[i] &: \text{経済的満足度}, X[i] : \text{個人所得}
\end{aligned}
$$

近傍モデル 2 のコードの実装例は以下の通りである．

```
data {
    int<lower=0> N ;
    real<lower=0> X[N] ;//所得 1/200 scale
    real<lower=0> Y[N] ;//主観的経済地位
    real a; real b; //別途推定したパラメータ
}

parameters {
    real beta0;real beta1;
    real<lower=0,upper=10> sigma;
    real<lower=0,upper=20> dl;
    real<lower=0,upper=20> du;
}

transformed parameters {
    real nume[N]; real deno[N]; real m[N];
    real c[N]; real d[N];
    for(i in 1:N){
        if(X[i]-dl<0){c[i]=0;} else {c[i]=X[i]-dl;};
        d[i]=X[i]+du;
    }
    for(i in 1:N){
        nume[i]=(gamma_p(a+1,d[i]*b)-gamma_p(a+1,c[i]*b));
        deno[i]=(gamma_p(a,d[i]*b)-gamma_q(a,d[i]*b));
        m[i]=nume[i]/deno[i];
    }
}

model {
    for( i in 1 : N ) {
        target += normal_lpdf(Y[i] |beta0+beta1*(X[i]-m[i]), sigma);
    }
    target += uniform_lpdf(sigma|0,5);
    target += uniform_lpdf(dl|0,10);
    target += uniform_lpdf(du|0,10);
    target += normal_lpdf(beta0|0,100);
    target += normal_lpdf(beta1|0,100);
}
```

事後分布の計算結果は以下の通りである．Rhat の数値は概ね問題は無いが，有効サンプル数に関して δ_u の分布が不十分である．δ_l, δ_u を同時に推定するモデルは，事後分布計算の安定性が少

し欠けると言えるだろう．

	mean	sd	2.5%	97.5%	n_eff	Rhat
beta0	3.885510	0.05330319	3.7815438	3.9893494	540.56517	1.000789
beta1	0.675870	0.02648990	0.6213806	0.7268893	544.25759	1.006734
sigma	1.354766	0.02750267	1.3021733	1.4097294	462.70501	1.008833
du	4.253436	2.56093633	2.1891633	9.6175237	34.03875	1.071805
dl	9.018042	0.72703815	7.3126818	9.9572729	328.01040	1.006951
lp__	-2406.513188	2.03927324	-2411.0058173	-2403.4582797	97.24791	1.014710

[注]

1) SSP 調査の詳細についてはプロジェクトのウェブページ（http://ssp.hus.osaka-u.ac.jp）と『第 1 回 SSP 調査報告書』（http://ssp.hus.osaka-u.ac.jp/pdf/SSP-2015.pdf）を参照．

2) ただし，以下の分析では収入なしのケースと 1 億円以上のケースを除外．

3) 動物行動学者ドゥ・ヴァールらの実験によれば，比較に基づく認識の相対性はヒトに固有の性質ではなくサルにも備わっており，不公平な扱いをうけたサルは不満を表すという (de Waal 2009=2010)．またシブリーらはカニクイザルを用いた実験で，集団内で下位のサルは上位のサルより，健康指標が悪化することを示した (Shively et al. 1997)．このことは精神的・肉体的健康に相対的剥奪が関連することを示唆している（Eibner and Evans 2005）．

4) 連続確率変数なので,(2) は z を選択する確率ではない．X の実現値である 1 点 z が選ばれる確率は常に 0 である．

5) 条件付き期待値を考える場合には, X の確率密度関数は，$X < x - \delta_l, x + \delta_u < X$ の範囲で 0 と考える．よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} z \cdot \frac{f_X(z)}{\int_{x-\delta}^{x+\delta} f_X(t)dt} dz = \int_{-\infty}^{x-\delta} z \cdot 0 \ dz + \int_{x-\delta}^{x+\delta} z \frac{f_X(z)}{\int_{x-\delta}^{x+\delta} f_X(t)dt} dz + \int_{x+\delta}^{\infty} z \cdot 0 \ dz = \int_{x-\delta}^{x+\delta} z \frac{f_X(z)}{\int_{x-\delta}^{x+\delta} f_X(t)dt} dz.$$

6) Hey and Lambert では，満足度を S' の記号で定義している．

7) Yitzhaki(1979) および Hey and Lambert(1980) では相対的剥奪度と相対的満足度を記号 $D(x), S(x)$ で表している．後で述べるようにわれわれは準拠集団の選択範囲を一般化して，有限の範囲から他者を選択するモデルを定義するために，新しい記号法を導入する

[文献]

Ball, Richard and Kateryna Chernova, 2008, “ Absolute income, relative income, and happiness,” *Social Indicators Research*, 88(3): 497-529.

Bartoszynski, Robert and Magdalena Niewiadomska-bugaj, 2008, *Probability and Statistical Inference, Second Edition*, A John Wiley & Sons.

Berrebi, Z. M. and Jasques Silber, 1985, “Income inequality indices and deprivation: a generalization,” *Quarterly Journal of Economics*, 100(3): 807-10.

Bossert, W. and Conchita D’Ambrosio, 2006, “Reference groups and individual deprivation,” *Economics Letters*, 90(3): 421-426.

Chakravarty, Satya R., Chattopadhyay, N. and Majumder, A. 1995, “Income inequality and relative deprivation,” *Keio Economic Studies*, 32: 115.

Clark, Andrew E., and Andrew J. Oswald, 1996, "Satisfaction and comparison income," *Journal of Public Economics*, 61: 359-81.

D'Ambrosio, Conchita, and Joachim R. Frick, 2007, "Income satisfaction and relative deprivation: an empirical link," *Social Indicators Research*, 81(3): 497-519.

de Waal, Frans, 2009, *The Age of Empathy: Nature's Lessons for a Kinder Society*, New York, NY: Harmony Books.(=2010, 柴田裕之訳『共感の時代へ』紀伊國屋書店.)

Duesenberry, J.S. 1949, *Income, Saving and the Theory of Consumer Behavior*, Cambridge, MA: Harvard Univ. Press,

Eibner, Christine and William N. Evans, 2005, "Relative deprivation, poor health habits, and mortality," *Journal of Human Resources*, 40(3): 591-620

Ebert, Udo. and Patrick Moyes, 2000, " An axiomatic characterization of Yitzhaki's index of individual deprivation." *Economics Letters*, 68(3): 263-70.

Ferrer-i-Carbonell, Ada, 2005, "Income and well-being: an empirical analysis of the comparison income effect," *Journal of Public Economics,* 89(5-6): 997-1019.

浜田宏, 2001,「経済的地位の自己評価と準拠集団 —— δ 区間モデルによる定式化」『社会学評論』206 号（第 52 巻・第 2 号）: 283-99.

Hey, John. D. and Peter J. Lambert, 1980, "Relative deprivation and the Gini coefficient: comment," *Quarterly Journal of Economics*, 95(3): 567-573.

石田淳, 2011,「相対的剥奪と準拠集団の計量モデル」『理論と方法』26(2): 371-88.

石田淳, 2015,『相対的剥奪の社会学——不平等と意識のパラドックス』東京大学出版会.

飯田義郎, 2009,「相対所得における他者とは誰か——アンケート調査から」『京都産業大学論集. 社会科学系列』26:131-56.

飯田義郎, 2011,「相対所得におけるリファレンスグループの選択とその動機」『京都産業大学論集. 社会科学系列』28:1-23.

Kakwani, Nanak 1984, "The relative deprivation curve and its applications, " *Joural of Business & Economic Statistics*, 2(4): 384-94.

Kondo, Naoki, Ichiro Kawachi, S.V. Subramanian, Yasuhisa Takeda, Zentaro Yamagata, 2008, "Do social comparisons explain the association between income inequality and health?: relative deprivation and perceived health among male and female Japanese individuals," *Social Science & Medicine*,67(6): 982-7.

Luttmer, Erzo, 2005, "Neighbors as negatives: relative earnings and well-being," *Quarterly Journal of Economics*, 120(3): 923-1002.

前田豊, 2014, 「比較対象選択と所得イメージ」『理論と方法』29(1): 37-58.

Maeda, Yutaka, and Atsushi Ishida，2013, "Income comparison as a determining mechanism of class identification: a quantitative and simulation study using Japanese survey data,"

International Journal of Japanese Sociology, 22: 143-59.

McBride, Michael, 2001, "Relative-income effects on subjective well-being in the cross-section," *Journal of Economic Behavior & Organization*, 45: 251-278.

Merton, Robert K. 1957, *Social Theory and Social Structure,* New York: The Free Press. (=1961, 森東吾・森好夫・金沢実・中島竜太郎訳『社会理論と社会構造』みすず書房.)

Oshio, Takashi, Kayo Nozaki, and Miki Kobayashi, 2011, "Relative income and happiness in Asia: evidence from nationwide surveys in China, Japan, and Korea, " *Social Indicators Research*, 104: 351 - 67.

Runciman, Walter, G. 1966, *Relative Deprivation and Social Justice: A Study of Attitudes to Social Inequality in Twentieth-century England*, London: Routledge & K. Paul.

Shively, Carol A., Kathy, Laber-Laird,. and Raymond, F. Anton, 1997, Behavior and physiology of social stress and depression in female cynomolgus monkeys, *Biological Psychiatry*, 41(8): 871-882,

Stewart, Quincy T. 2006, "Reinvigorating relative deprivation: a new measure for a classic concept." *Social Science Research*, 35(3): 779 - 802.

Stouffer, Samuel A., Edward A. Suchman, Leland C. DeVinney, Shirley A. Star, and Robin M. Williams, Jr. 1949, *Studies in Social Psychology in World War II: The American Soldier. Vol. 1: Adjustment During Army Life*, Princeton: Princeton University Press.

Subramanyam, Malavika, Ichiro Kawachi, Lisa Berkman, and S. V. Subramanian, 2009, "Relative deprivation in income and self-rated health in the United States." *Social Science & Medicine*, 69(3): 327 - 34.

Yitzhaki, Shlomo, 1979, "Relative deprivation and the Gini coefficient," *Quarterly Journal of Economics*, 93(2): 321-324.